

## Экзаменационные вопросы

1. Приведите примеры, где требуется численное решение задач
2. Сформулируйте теорему Больцано–Коши о существовании решения уравнения
3. Проанализируйте метод Холецкого для решения системы линейных алгебраических уравнений
4. Покажите решение системы линейных алгебраических уравнений методом Зейделя
5. Дайте определение конечной разности первого, второго и третьего порядков
6. Свяжите конечные разности разных порядков с производными функции
7. Запишите интерполяционный многочлен Ньютона через разделённые разности
8. Дайте определение базисных многочленов Лагранжа и докажите их свойства
9. Запишите общий вид интерполяционного многочлена Лагранжа для  $n + 1$  узлов
10. Получите формулу для первой производной из интерполяционного многочлена Ньютона
11. Объясните суть приближённого (численного) дифференцирования функции
12. Покажите влияние шага сетки  $h$  на точность приближённого дифференцирования
13. Постройте интерполяционный многочлен Лагранжа для численного интегрирования
14. Получите формулу трапеций для приближённого вычисления определённого интеграла
15. Докажите формулу Симпсона
16. Решите систему методом Якоби

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -3, \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 - 4x_2 + 10x_3 = 0 \end{cases} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1,235 \\ 1,089 \\ 0,560 \end{pmatrix}$$

17. Решите систему методом Зейделя

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 + 2x_3 = 6, \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 = 25, \\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = -11, \\ 3x_2 - x_3 + 8x_4 = 15. \end{cases} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

18. Постройте конечные разности для функции  $f(x) = x^3$ , считая шаг  $\Delta x = 1$ .

19. Приняв шаг  $h = 0,05$ , построить на отрезке  $[3,5; 3,6]$  интерполяционный полином Ньютона для функции  $y = e^x$ , заданной таблицей:

$x$	3.50	3.55	3.60	3.65	3.70
$y$	33.115	34.813	36.598	38.475	40.447

Таблица 1: Таблица значений функции  $y = e^x$

20. В таблице приведены значения интеграла вероятностей

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Применяя первую интерполяционную формулу Ньютона, приближённо найдите  $\Phi(1.43)$

$x$	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
$y$	0.8427	0.8802	0.9103	0.9340	0.9523	0.9661	0.9763	0.9838	0.9891	0.9928	0.9953

21. Дана таблица значений функции  $y = \lg x$

$x$	1000	1010	1020	1030	1040	1050
$y$	3,000000	3,0043214	3,0086002	3,0128372	3,0170333	3,0211893

Найдите  $\lg 1044$ .

22. Дана таблица значений функции  $y = f(x)$

$x$	321,0	322,8	324,2	325,0
$y$	2,50651	2,50893	2,51081	2,51188

Вычислите значение  $f(323,5)$ .

23. Дана таблица значений функции  $y = \lg x$

$x$	50	55	60	65
$y$	1,6990	1,7404	1,7782	1,8129

Найдите  $y'(50)$ .

24. Решите систему методом итерации

$$\begin{cases} 4x_1 + 0,24x_2 - 0,08x_3 = 8, \\ 0,09x_1 + 3x_2 - 0,15x_3 = 9, \\ 0,04x_1 - 0,08x_2 + 4x_3 = 20 \end{cases}$$

25. Решите систему уравнений методом Зейделя

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13, \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14. \end{cases}$$

26. Для функции  $y = \sin \pi x$  постройте интерполяционный полином Лагранжа, выбрав узлы

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{6}, \quad x_2 = \frac{1}{2}.$$

27. Дана задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка

$$y' = y - t^2 + 1, \quad y(0) = 0.5.$$

Используя метод Рунге–Кутты 4-го порядка, вычислите приближённые значения  $y$  в точках  $t = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ . Сравните полученные результаты с точным решением уравнения

$$y(t) = (t + 1)^2 - 0.5e^t.$$

28. Решите задачу численно с помощью **явной конечно-разностной схемы**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0.1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = \sin(\pi x), \quad u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0.$$

Вычислите приближённые значения  $u(x, t)$  на сетке:

$$x_i = i\Delta x, \quad i = 0, 1, \dots, 10, \quad \Delta x = 0.1,$$

$$t_n = n\Delta t, \quad n = 0, 1, \dots, 10, \quad \Delta t = 0.005.$$

29. Дана задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка

$$y' = -2ty^2, \quad y(0) = 1, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Решите уравнение численно с помощью **метода Эйлера** с шагом  $\Delta t = 0.1$ . Сравните полученные результаты и оцените погрешность на каждом шаге относительно точного решения:

$$y(t) = \frac{1}{1+t^2}.$$

30. Дана начально-краевая задача для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t > 0,$$
$$u(x, 0) = \sin(\pi x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0.$$

Используя **явную конечно-разностную схему для волнового уравнения**, вычислите приближённые значения  $u(x, t)$  на сетке:

$$x_i = i\Delta x, \quad i = 0, 1, \dots, 10, \quad \Delta x = 0.1,$$

$$t_n = n\Delta t, \quad n = 0, 1, \dots, 20, \quad \Delta t = 0.005.$$

31. Решите краевую задачу методом коллокаций

$$y''(x) - y(x) = x, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

32. Решите краевую задачу методом Галеркина с использованием двух базисных функций

$$y''(x) - y(x) = x, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

33. Решите краевую задачу с использованием метода конечных разностей

$$y''(x) - y(x) = x, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

34. Постройте явную разностную схему для одномерного уравнения теплопроводности и объясните ее основные элементы.

35. Постройте неявную разностную схему для параболического уравнения и объясните ее особенности
36. Объясните их значение при численном решении параболических уравнений.
37. Объясните, какие условия точности и устойчивости должны выполняться для явной разностной схемы при решении параболических уравнений
38. Объясните принцип построения расчетной сетки
39. Объясните принцип применения сеточных (разностных) методов для решения гиперболических уравнений в частных производных
40. Постройте явную разностную схему для одномерного волнового уравнения и объясните основные этапы ее получения.
41. Что понимается под устойчивостью разностной схемы при решении гиперболических уравнений? Объясните условия устойчивости
42. Объясните понятия точности и сходимости разностных схем при численном решении гиперболических уравнений.
43. Получите вариационную (слабую) постановку задачи Дирихле для уравнения Пуассона
44. В чем заключается метод Галеркина? Объясните основные идеи и этапы применения метода для решения вариационных задач
45. Объясните принцип выбора базисных функций в методе Галеркина и их роль при приближенном решении задачи
46. Опишите основные этапы применения метода коллокаций для решения дифференциальных уравнений
47. Как выбираются базисные функции в методе коллокаций и как они влияют на точность решения? Объясните основную идею
48. Что такое коллокационные точки? Объясните их роль при построении приближенного решения